ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 + \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \end{cases}$ (1).

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega^2 - 13\omega + 36 = 0$ που έχει ρίζες $\omega = 4$ και $\omega = 9$. Άρα $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Οπότε το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τις $(2,3), (-2,-3), (3,2)$ και $(-3,-2)$.

β) Παρατηρούμε ότι:

$|2 \cdot 3| = 6$ και $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Ομοίως $|-2 \cdot (-3)| = 6$ και $(-2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$, $|3 \cdot 2| = 6$ και $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, $|(-3) \cdot (-2)| = 6$ και $(-3)^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$, άρα οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) είναι και λύσεις του (Σ_2).

γ)

i. Το (Σ_2) έχει οκτώ λύσεις, τις $(2,3), (-2,-3), (3,2), (-3,-2)$ (που είναι λύσεις και του (Σ_1)) και τις $(-2,3), (-3,2), (3,-2), (2,-3)$.

ii. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γεωμετρική αναπαράσταση του (Σ_1) είναι το τμήμα της γραφικής αναπαράστασης του (Σ_2) που αποτελείται από τον κύκλο και τους κλάδους της υπερβολής που βρίσκονται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο, όπου είναι σημειωμένα και τα σημεία τομής των δυο γραμμών, οι συντεταγμένες των οποίων είναι οι λύσεις του συστήματος αυτού.