

ΛΥΣΗ

α)

i. Για  $\lambda = -1$  το σύστημα γίνεται:  $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - 1y = -1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ , οπότε η λύση του συστήματος είναι  $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ .

ii. Από το αι) ερώτημα έχουμε  $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta = -1$ ,  $y_0 = \eta\mu\theta = 0$  και  $\theta \in [0, 2\pi)$ , οπότε  $\theta = \pi$ .

β) Για  $\lambda = 1$  το σύστημα γίνεται:  $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + 1y = 1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ , οπότε η λύση του συστήματος

είναι  $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Δεν υπάρχει γωνία  $\omega$ , τέτοια ώστε  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{3}$  και  $\eta\mu\omega = \frac{2}{3}$ , διότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \neq 1.$$

γ)

i. Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα  $(\Sigma)$  έχει μοναδική λύση την  $(x_2, y_2)$  με  $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi$  και  $y_2 = \eta\mu\varphi$ , τότε θα ικανοποιεί και την πρώτη εξίσωση,  $-x + 2y = 1$ . Δηλαδή:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi + 2\eta\mu\varphi = 1 \quad (1).$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi + 2\eta\mu\varphi = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\varphi = 1 + \overset{\eta\mu\varphi > 0}{\underset{\sigma\upsilon\nu\varphi > 0}{\sigma\upsilon\nu\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu^2\varphi = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$4(1 - \sigma\upsilon\nu^2\varphi) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2\varphi + 2\sigma\upsilon\nu\varphi - 3 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση πολυωνυμική 2<sup>ου</sup> βαθμού με  $\Delta = 64 > 0$  και ρίζες

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = -1, \text{ που απορρίπτεται γιατί } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}.$$

Άρα από την (1) έχουμε:

$$-\frac{3}{5} + 2\eta\mu\varphi = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\varphi = \frac{8}{5} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}.$$

ii. Η λύση  $(x_2, y_2) = (\sigma\nu\nu\varphi, \eta\mu\varphi) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  του συστήματος  $(\Sigma)$  θα ικανοποιεί και την

δεύτερη εξίσωσή του, δηλαδή

$$\frac{3}{5} + \lambda \cdot \frac{4}{5} = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} \cdot \lambda \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3.$$