ΛΥΣΗ

α) i) Είναι $MN = \frac{3R}{2}$ και $ON = R$, άρα $OM = MN - ON = \frac{3R}{2} - R = \frac{R}{2}$.

Επειδή η AB έχει απόστημα $OM = \frac{R}{2}$, είναι ίση με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) οπότε θα είναι $AB = R\sqrt{3}$.

ii) Η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ίση με την κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) , άρα θα είναι $A\hat{O}B = \frac{360°}{3} = 120°$.

β) i) Είναι $R = 10$ cm, οπότε $AB = R\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ cm και $OM = \frac{R}{2} = 5$ cm.

Το εμβαδόν του τριγώνου AOB είναι $E_1 = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} 10\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3}\, cm^2$.

Ο κυκλικός τομέας $O\,\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι γωνίας $\mu = 360° - A\hat{O}B = 360° - 120° = 240°$ οπότε το εμβαδόν του θα είναι $E_2 = \frac{\pi R^2 \mu}{360°} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 240°}{360°} = \frac{200\pi}{3}\, cm^2$.

Επομένως το εμβαδόν που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο $\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι

$$E = E_2 + E_1 = \frac{200\pi}{3} + 25\sqrt{3}\ cm^2.$$

Εναλλακτικά: Αν $E\kappa$, $\left(O\,\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και E_1 είναι αντίστοιχα τα εμβαδά του κύκλου, του κυκλικού τομέα γωνίας $A\hat{O}B = 120°$ και του τριγώνου AOB, το εμβαδόν που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο $\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι

$$E = E_\kappa - \left(O\,\widehat{\mathrm{AB}}\right) + E_1 = \pi \cdot 10^2 - \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 120°}{360°} + 25\sqrt{3} = 100\pi - \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3} =$$

$$\frac{200\pi}{3} + 25\sqrt{3}\, cm^2.$$

ii) Το τόξο $\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι τόξο $\mu = 240°$ οπότε το μήκος του είναι

$$l = \frac{\pi R \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 240°}{180°} = \frac{40\pi}{3}\, cm.$$