

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει να ορίζεται το κλάσμα, δηλαδή ο παρονομαστής να μη γίνεται μηδέν.

Το τριώνυμο $3x^2 - x - 2$ μηδενίζεται για $x = 1$ ή $x = -\frac{2}{3}$.

Επομένως, η συνάρτηση f ορίζεται για όλα τα x που ανήκουν στο $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$.

β) Ο παρονομαστής της συνάρτησης είναι το τριώνυμο $3x^2 - x - 2$. Από το α ερώτημα βρήκαμε τα x για τα οποία μηδενίζεται.

Άρα σύμφωνα με τον γενικό τύπο παραγοντοποίησης τριωνύμου έχουμε:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x + 2).$$

γ) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης πρέπει να παραγοντοποιήσουμε και αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος.

$$\text{Συνεπώς, } f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^2 - x - 2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(3x+2)} = \frac{x}{3x+2}.$$

$$\delta) \text{ Έχουμε: } |f(x)| = \frac{1}{4} \text{ ή } \left| \frac{x}{3x+2} \right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{3x+2} = \frac{1}{4} \text{ ή } \frac{x}{3x+2} = -\frac{1}{4}$$

τότε

$$\begin{aligned} 4x &= 3x + 2 \Leftrightarrow x = 2 \\ &\text{ή} \\ 4x &= -3x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = -\frac{2}{7}$.