ΛΥΣΗ

α) Οι $k-1, 6$ και $3k$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου, άρα ισχύει:

$$\frac{6}{k-1}=\frac{3k}{6}, \text{ οπότε}$$

$$3k\cdot(k-1)=36, \text{ δηλαδή}$$

$$k\cdot(k-1)=12, \text{ οπότε}$$

$$k^2-k-12=0, \text{ που είναι εξίσωση } 2^{ου} \text{ βαθμού με}$$

$$\text{άθροισμα ριζών: } k_1+k_2=\frac{-(-1)}{1}=1 \text{ και}$$

$$\text{γινόμενο ριζών } k_1\cdot k_2=\frac{-12}{1}=-12, \text{ οπότε}$$

$$k_1=4 \text{ και } k_2=-3.$$

Τελικά οι δυνατές τιμές του k είναι -3 και 4.

β) Για $k=4$,

i. οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι $3, 6$ και 12 οπότε η γεωμετρική πρόοδος έχει λόγο $\lambda=\frac{6}{3}=2$. Ο τέταρτος όρος της προόδου είναι $12\cdot 2=24$.

ii. η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1=3$ και λόγο $\lambda=2$, οπότε ο ν-οστός όρος είναι $\alpha_\nu=3\cdot 2^{\nu-1}$. Ζητάμε την μικρότερη τιμή του $\nu\in\mathbb{N}$, ώστε

$$\alpha_\nu>3\cdot 2^8, \text{ δηλαδή}$$

$$3\cdot 2^{\nu-1}>3\cdot 2^8, \text{ οπότε}$$

$$2^{\nu-1}>2^8,$$

οπότε με δοκιμή βρίσκουμε ότι πρέπει $\nu-1>8$, δηλαδή $\nu>9$. Άρα ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το αριθμό $3\cdot 2^8$ (=768) είναι ο $10^{ος}$ όρος της προόδου.