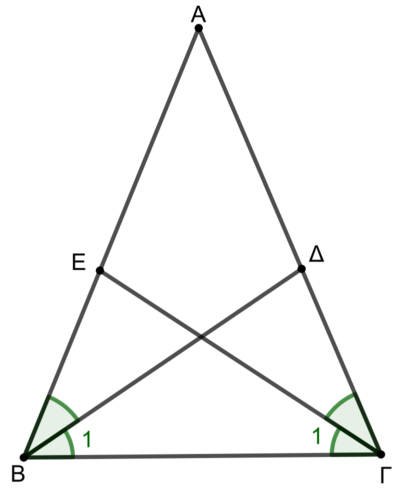
α)

i.

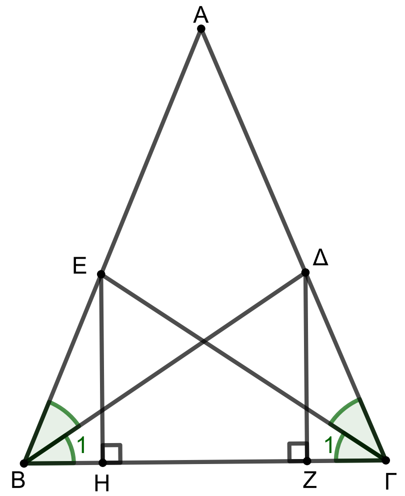


Στα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ:

- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}}$ =$\widehat{\Gamma}$ γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Γ-Π-Γ.

ii. Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ.



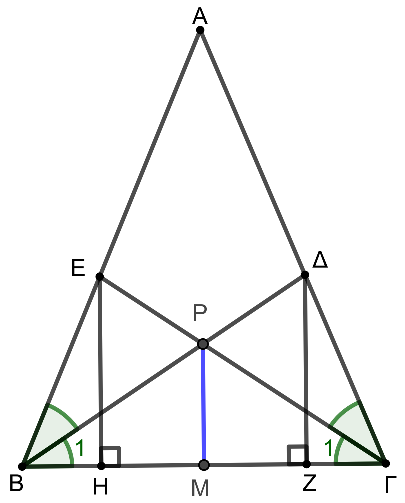
Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα, άρα θα ισχύει ΓΔ = ΒΕ (1) γιατί είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ αντίστοιχα.

Στα τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΓΖ:

- $\widehat{\mathrm{H}} = \widehat{\mathrm{Z}} = 90°$ (ΕΗ⊥ΒΓ και ΔΖ⊥ΒΓ)
- $\widehat{\mathrm{B}}$ =$\widehat{\Gamma}$ (γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)
- ΕΒ = ΔΓ από τη σχέση (1)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε είναι και ΕΗ = ΔΖ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β) Έστω Ρ το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ.



Επειδή $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ όπως αναφέρθηκε και στο α) ερώτημα, το τρίγωνο ΒΡΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο Ρ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΡΜ είναι διάμεσος της βάσης ΒΓ, αφού Μ είναι το μέσο του ΒΓ, επομένως θα είναι και ύψος, δηλαδή ΡΜ ⊥ ΒΓ. Άρα το τμήμα ΡΜ καθώς και τα τμήματα ΕΗ και ΔΖ είναι κάθετα τμήματα στο ίδιο τμήμα ΒΓ, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.