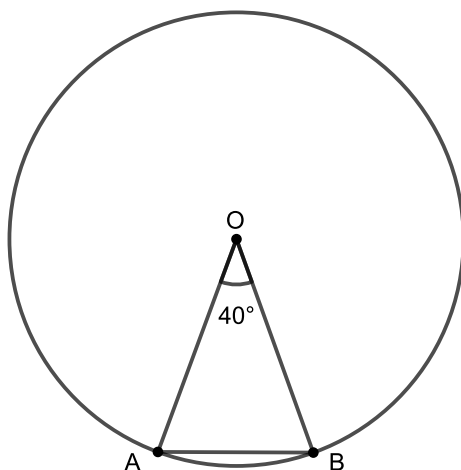


ΛΥΣΗ

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε σημεία A και B ώστε $\widehat{AOB} = 40^\circ$.



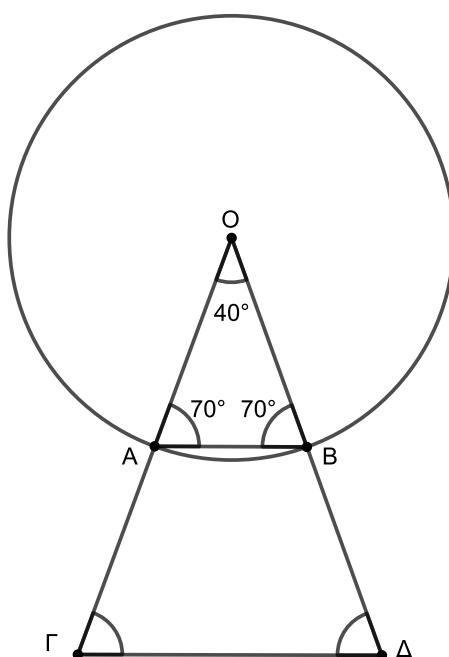
α) Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές OA και OB είναι ίσες με την ακτίνα R . Επομένως, οι γωνίες \widehat{A} και \widehat{B} θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση AB .

Στο τρίγωνο OAB ισχύει:

$$\widehat{O} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 2\widehat{A} = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{A} = 140^\circ.$$

Άρα, $\widehat{A} = 70^\circ$ και $\widehat{B} = 70^\circ$.

β) Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$.



i. Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα, αφού $ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 2R$ και $ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 2R$.

Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ. Οπότε, οι γωνίες $Ο\hat{\Gamma}\Delta$ και $Ο\hat{\Delta}\Gamma$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $Ο\hat{\Gamma}\Delta = Ο\hat{\Delta}\Gamma$.

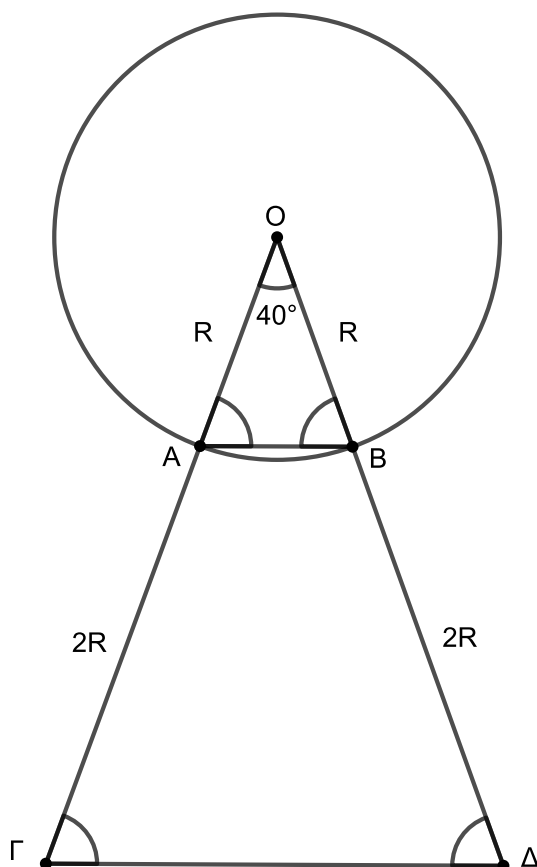
Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$$\hat{O} + Ο\hat{\Gamma}\Delta + Ο\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 2Ο\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ \text{ ή } 2Ο\hat{\Gamma}\Delta = 140^\circ.$$

Άρα, $Ο\hat{\Gamma}\Delta = 70^\circ$ και $Ο\hat{\Delta}\Gamma = 70^\circ$.

ii. Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $Ο\hat{A}B$ και $Ο\hat{\Gamma}\Delta$ ίσες. Επομένως, οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες, δηλαδή $ΑΒ // ΓΔ$.

γ)



Αν είναι $ΑΓ = 2ΟΑ = 2R$ και $ΒΔ = 2ΟΒ = 2R$, τότε τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ θα είναι ίσα, αφού $ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 3R$ και $ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 3R$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ θα είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ. Οπότε, οι γωνίες $Ο\hat{\Gamma}\Delta$ και $Ο\hat{\Delta}\Gamma$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $Ο\hat{\Gamma}\Delta = Ο\hat{\Delta}\Gamma$.

Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$$\widehat{O} + \widehat{O\Gamma\Delta} + \widehat{O\Delta\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 2\widehat{O\Gamma\Delta} = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{O\Gamma\Delta} = 140^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \widehat{O\Gamma\Delta} = 70^\circ \text{ και } \widehat{O\Delta\Gamma} = 70^\circ.$$

Όπως και στο ερώτημα (βii), οι AB και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $\widehat{O\Delta\Gamma}$ και $\widehat{O\Gamma\Delta}$ ίσες. Επομένως, οι AB και ΓΔ είναι παράλληλες, δηλαδή $AB \parallel \Gamma\Delta$.