ΛΥΣΗ

α) Οι λύσεις της εξίσωσης $\sqrt{x} = 2x - 1$ αντιστοιχούν στις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Από το σχήμα, παρατηρούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται μόνο σε ένα σημείο, η τετμημένη του οποίου είναι 1. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό 1.

β) Αφού στο 1ο μέλος υπάρχει η $\sqrt{x}$, αναζητούμε λύσεις μόνο για $x \geq 0$.

Αν όμως είναι $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\sqrt{x} \geq 0$.

Επομένως, για $x \geq \frac{1}{2}$, έχουμε $\left(\sqrt{x}\right)^2 = (2x-1)^2$, άρα $x = 4x^2 - 4x + 1$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση $4x^2 - 5x + 1 = 0$, με διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$, άρα θα έχουμε $x = \frac{5 \pm 3}{8}$. Έτσι, έχουμε $x = 1$, δεκτή ή $x = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, απορρίπτεται.

Τέλος, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός 1 επαληθεύει την αρχική εξίσωση, αφού

$\sqrt{1} = 1 = 2 \cdot 1 - 1$.

γ) Από το σχήμα, παρατηρούμε ότι για $x \in [0, 1)$ οι αριθμοί $f(x)$ είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους αριθμούς $g(x)$, αφού στο συγκεκριμένο διάστημα, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g. Επομένως, λύσεις της ανίσωσης $\sqrt{x} > 2x - 1$ είναι όλοι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $0 \leq x < 1$.