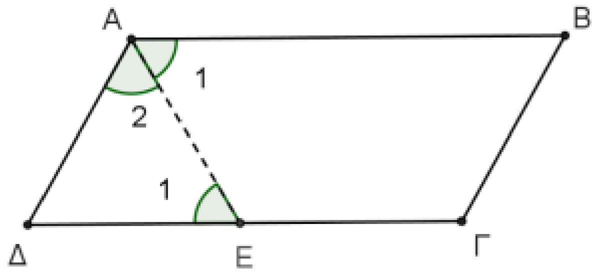
ΛΥΣΗ

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΔ < ΑΒ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας του $\widehat{A}$ και έστω Ε το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει την πλευρά ΔΓ.



α) Η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (1).

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες, οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα τη ΑΕ.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{A}_2 = \widehat{E}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΔΕ (3).

Συνεπώς, ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες, δηλαδή ΑΔ = ΒΓ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι ΔΕ = ΒΓ.

Συνεπώς, ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, τότε όλες οι γωνίες του θα είναι 60^0, οπότε $\widehat{\Delta} = 60^0$.

Όμως $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, οπότε $\widehat{B} = 60^0$.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{A}$ είναι παραπληρωματικές, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, οπότε:

$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^0$ με $\widehat{B} = 60^0$ ή $\widehat{A} = 180^0 - 60^0$ ή $\widehat{A} = 120^0$.

Όμως $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, οπότε $\widehat{\Gamma} = 120^0$.