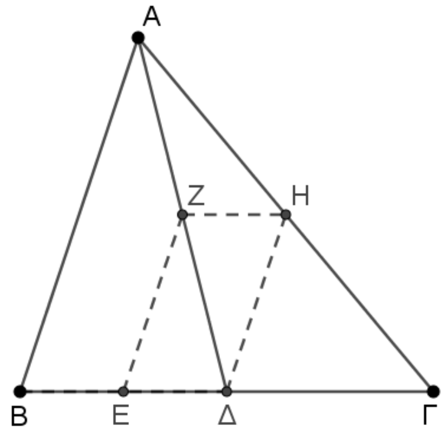
ΛΥΣΗ



α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και το Η είναι μέσο της ΑΓ, οπότε το τμήμα ΔΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΔΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή:

$$ΔΗ = // \frac{AB}{2} \quad (1)$$

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Ε είναι μέσο της ΒΔ, οπότε το τμήμα ΖΕ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή:

$$ΖΕ = // \frac{AB}{2} \quad (2)$$

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΔΗ = // ΖΕ, επομένως το τετράπλευρο ΖΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

γ) Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΖΗΔΕ ρόμβος, αρκεί δύο διαδοχικές του πλευρές να είναι ίσες, έστω ΖΗ = ΖΕ.

Στο τρίγωνο ΑΔΓ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Η μέσο της ΑΓ, οπότε το τμήμα ΖΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΔΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $ΖΗ = // \frac{ΔΓ}{2}$.

Αντικαθιστώντας στην ισότητα ΖΗ = ΖΕ αυτό που βρήκαμε στο α)ii) ερώτημα έχουμε:

$\frac{ΔΓ}{2} = \frac{AB}{2}$ ή $ΔΓ = AB$. Όμως, $ΔΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ και επομένως $\frac{ΒΓ}{2} = AB$, δηλαδή ΒΓ = 2ΑΒ.