ΛΥΣΗ

α) Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου ΒΓΕΔ.

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε θα είναι:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma E} = \frac{A\Delta}{AE}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{2}{3}$, άρα $\frac{B\Delta}{\Gamma E} = \frac{2}{3}$.

Αντικαθιστώντας το γνωστό μήκος $\Gamma E = 6$ έχουμε:

$$\frac{B\Delta}{6} = \frac{2}{3}$$

Άρα $3 \cdot B\Delta = 12$ ή $B\Delta = 4$.

β) i. Από πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα (και αντίστροφα). Η ΒΔ είναι παράλληλη με την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. Άρα χωρίζει τις πλευρές ΑΓ και ΑΕ του ΑΓΕ σε μέρη ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$$

Εφόσον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι πλευρές του ΒΓ και ΔΕ είναι ίσες. Επομένως:

$$\frac{B\Gamma}{\Delta E} = 1$$

Άρα από τις δύο προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι:

$\frac{AB}{A\Delta} = 1$ ή ΑΒ = ΑΔ

Δηλαδή οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι ίσες. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

ii. Εφόσον $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{2}{3}$ και $AE = 12$ έχουμε ότι:

$$\frac{A\Delta}{12} = \frac{2}{3}$$

Άρα $3 \cdot A\Delta = 2 \cdot 12$ ή $3 \cdot A\Delta = 24$ ή $A\Delta = 24 : 3$ ή $A\Delta = 8$.

Εφόσον, από το β)ii., το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$ είναι $AB = 8$.