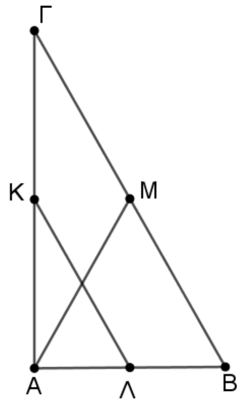
ΛΥΣΗ



α)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα ισούται με το μισό της, δηλαδή:

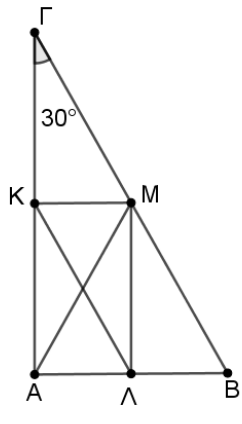
$$\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \quad (1)$$

Το σημείο Κ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Λ μέσο της πλευράς ΑΒ, οπότε το τμήμα ΚΛ θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς ΒΓ, δηλαδή:

$$\mathrm{K\Lambda} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι ΚΛ = ΑΜ.

ii.

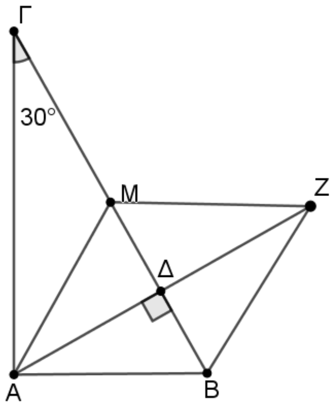


Το σημείο Κ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς ΒΓ, οπότε το τμήμα ΚΜ θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς ΑΒ και θα είναι παράλληλο σε αυτήν, δηλαδή:

$$\mathrm{KM} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \mathrm{A\Lambda}$$

Επομένως το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, ΚΜ = // ΑΛ. Στο ερώτημα α)i αποδείξαμε ότι ΚΛ = ΑΜ. Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τις διαγώνιές του ίσες.

β)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή:

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι ΑΜ = ΑΒ = ΒΜ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του ΑΔ θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΜΔ = ΔΒ. Από υπόθεση έχουμε ότι ΑΔ = ΔΖ. Επομένως, το τετράπλευρο ΑΜΖΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του ΜΒ και ΑΖ διχοτομούνται. Επειδή όπως αναφέραμε, ΑΜ = ΑΒ, το παραλληλόγραμμο ΑΜΖΒ είναι ρόμβος γιατί δύο διαδοχικές του πλευρές είναι ίσες.