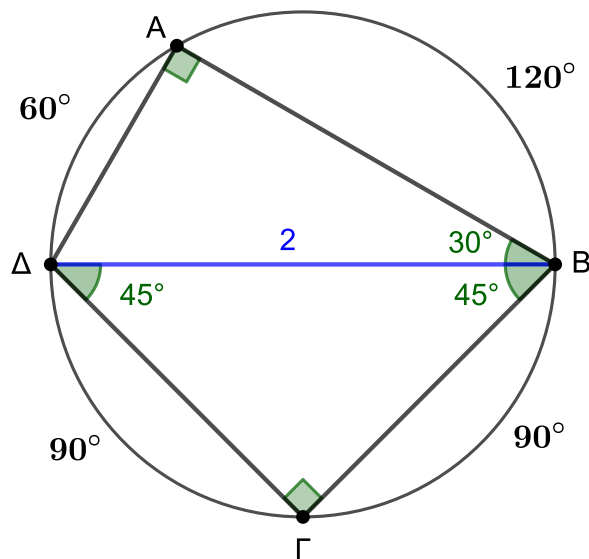


ΛΥΣΗ



α) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της. Οι εγγεγραμμένες γωνίες \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ βαίνουν αντίστοιχα, στα τόξα $\widehat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta A} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, $\widehat{\Delta A B} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ και $\widehat{A B \Gamma} = 120^\circ + 90^\circ = 210^\circ$, άρα θα είναι

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ, \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ, \hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \text{ και } \hat{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 210^\circ = 105^\circ.$$

β) i) Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι $\hat{A} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ορθογώνιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ, η υποτείνουσα είναι ΒΔ = 2 και η γωνία $\hat{A B \Delta} = 30^\circ$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{\Delta A} = 60^\circ$. Επομένως η απέναντι πλευρά ΑΔ είναι το μισό της υποτείνουσας, άρα $A\Delta = 1$.

ii) Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ η υποτείνουσα είναι ΒΔ = 2. Επίσης είναι $\hat{\Delta B \Gamma} = \hat{B \Delta \Gamma} = 45^\circ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε τόξο 90° . Άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι και ισοσκελές με $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα τότε έχουμε

$$B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2 \text{ ή } 2B\Gamma^2 = 2^2 \text{ ή } B\Gamma^2 = 2 \text{ ή } B\Gamma = \sqrt{2}.$$