

ΛΥΣΗ

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ οπότε είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και ίσο με το μισό της. Επομένως οι ΔΕ και ΑΖ είναι παράλληλες και $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$, αφού το Ζ είναι το μέσο της ΑΓ.

Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επίσης είναι $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$, αφού τα Δ και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, είναι $\hat{\Gamma} = \hat{Β} = 75^\circ$ και επομένως $\hat{Α} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου ανά δυο είναι ίσες, άρα $\hat{ΔΕΖ} = \hat{Α} = 30^\circ$ και $\hat{ΑΔΕ} = \hat{ΑΖΕ}$.

Όμως $\hat{ΑΔΕ} + \hat{ΑΖΕ} = 360^\circ - \hat{ΔΕΖ} - \hat{Α} = 360^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 300^\circ$,

άρα $\hat{ΑΔΕ} = \hat{ΑΖΕ} = 150^\circ$.

γ) Το ΑΔΕΖ είναι ρόμβος, οπότε θα είναι τετράγωνο, αν επιπλέον είναι ορθογώνιο. Τότε

$\hat{Α} = 90^\circ$, οπότε $\hat{Β} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{Α}}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$. Στην περίπτωση αυτή, το τρίγωνο

ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

